



TUGAS AKHIR - SM141501

**PENERAPAN METODE WIDDER UNTUK  
MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION TANPA  
DIVIDEN**

LISA ANISA  
NRP 1213 100 027

Dosen Pembimbing:  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017





FINAL PROJECT - SM141501

**APPLICATION OF WIDDER METHOD TO  
CALCULATE AMERICAN PUT OPTION  
WITHOUT DIVIDENDS**

LISA ANISA  
NRP 1213 100 027

Supervisor:  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2017



**LEMBAR PENGESAHAN**  
**PENERAPAN METODE WIDDER UNTUK**  
**MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION**  
**TANPA DIVIDEN**

***APPLICATION OF WIDDER METHOD TO***  
***CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITHOUT***  
***DIVIDENDS***

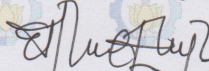
**TUGAS AKHIR**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:  
LISA ANISA  
NRP. 1213100027

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Endah Rokhmawati M. P., Ph.D  
NIP. 19761213 200212 2 001

Dosen Pembimbing I,




Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
NIP. 19600527 198701 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika

EMAPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Agustus 2017



# PENERAPAN METODE WIDDER UNTUK MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION TANPA DIVIDEN

Nama Mahasiswa : LISA ANISA  
NRP : 1213 100 027  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

## Abstrak

*Pendekatan numerik invers transformasi Laplace digunakan untuk mendapatkan solusi semianalitik. Dalam berbagai bidang penelitian untuk menyelesaikan permasalahan, pendekatan numerik invers transformasi Laplace metode Widder sudah banyak dikembangkan. Pada pembahasan ini, metode Widder akan digunakan untuk mendapatkan nilai American Put Option tanpa dividen melalui pendekatan numerik invers transformasi Laplace dengan menggunakan rumus analitik pada metode Widder melalui differensiasi dan selanjutnya akan didapatkan performansi dari metode Widder. Hasil analisa performansi metode Widder diperoleh hasil nilai  $S_f = 98.14\%$  dengan kecepatan komputasi yang dibutuhkan yaitu selama 303.257013 detik. Hasil yang didapat menunjukkan, metode Widder memiliki tingkat akurasi yang baik untuk menghitung nilai American Put Option tanpa Dividen*

**Kata-kunci:** *Invers transformasi Laplace, American Put Option tanpa dividen, Metode Widder*





# APPLICATION OF WIDDER METHOD TO CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITHOUT DIVIDENDS

Name : LISA ANISA  
NRP : 1213 100 027  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisors : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

## Abstract

*The numerical inverse approach of Laplace transformation is used to obtain semianalytic solution. The invers numerical approach of Lalplace transformation of the Widder method was developed in various research to solve various problems. In this discussion the Widder methode will be used to obtain American Put Option without dividen value through numeric invers approach of Laplace transformation using analytic formulation on the Widder methode by differentiation and then it will get the performance of the Widder method. Result of the performance analysis of the Widder methode obtained value  $S_f = 98.14\$$  with computation speed for 303.257013 second. The result show that Widder method has good degree of accuracy to calculate value American Put Option without dividen.*

**Keywords:** *Transformasi Invers Laplace, American Put Option without dividen, Metode Widder*



## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul

### **"PENERAPAN METODE WIDDER UNTUK MENGHITUNG NILAI *AMERICAN PUT* *OPTION* TANPA DIVIDEN"**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
2. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si dan Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Dra. Farida Agustini Widjajati, MS, Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si, Bapak Drs. Mohammad Setijo Winarko M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan semua saran demi perbaikan tugas akhir ini.

4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator tugas akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.
5. Bapak Suhud Wahyudi, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Ayah dan Ibu yang selalu mendoakan, menguatkan, dan mendukung penulis sehingga penulis bisa sampai saat ini.
8. Adik penulis Devi Febrilia yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan.
9. Grup pejuang 116, Ayur dan Ivan yang selalu memberikan dukungan, semangat, selama penulis mengerjakan tugas akhir.
10. Niken, Diana, Neni, Nurma, Jessica, Melynda, Enok, Ayu yang selalu menguatkan dan memberi dukungan kepada penulis.
11. Teman-teman seperjuangan 116 yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
12. Uzu yang membantu dalam memahami materi tugas akhir.
14. Dulur Matematika 2013 yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.

15. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu.  
Terimakasih telah mendoakan dan mendukung penulis  
sampai dengan selesainya program ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Agustus 2017

Penulis



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I      PENDAHULUAN	1
1.1    Latar Belakang . . . . .	1
1.2    Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3    Batasan Masalah . . . . .	3
1.4    Tujuan . . . . .	4
1.5    Manfaat . . . . .	4
BAB II     TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1    Penelitian Terdahulu . . . . .	5
2.2    Metode <i>Widder</i> . . . . .	6
2.3 <i>Option</i> . . . . .	7
2.3.1    2.3.1 Istilah-istilah dalam <i>option</i> . . . . .	7
2.3.2    Mekanisme <i>option</i> . . . . .	8
2.3.3    Tipe <i>option</i> . . . . .	9

2.4	Formula Harga <i>Exercise</i> Optimal .....	11
BAB III	METODE PENELITIAN	13
3.1	Tahap Penelitian.....	13
3.2	Alur Penelitian .....	15
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	17
4.1	Kajian Rumus Metode <i>Widder</i> .....	17
4.2	Uji Coba Fungsi Sederhana.....	25
4.3	Aplikasi Formula Harga <i>Exercise</i> Optimal pada Metode <i>Widder</i> .....	32
4.4	Analisa Performansi Metode <i>Widder</i> .....	34
BAB V	PENUTUP	37
5.1	Kesimpulan .....	37
5.2	Saran .....	37
DAFTAR PUSTAKA		39
LAMPIRAN		41



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian . . . . .	15
Gambar 4.1	Plot Nilai Rata-Rata $f(t) = \sin t$ . . . . .	27
Gambar 4.2	Plot Nilai Rata-Rata $f(t) = \cos t$ . . . . .	28
Gambar 4.3	Plot Nilai Rata-Rata $f(t) = e^t$ . . . . .	29
Gambar 4.4	Plot Nilai Rata-Rata $f(t) = t$ . . . . .	30
Gambar 4.5	Plot Nilai Rata-Rata $f(t) = 1$ . . . . .	31



## DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1 Harga Exercise Optimal pada Waktu $\tau$ . . . . .	33
Tabel 4.2 Harga Exercise Optimal dengan Metode <i>Widder</i> . .	37
Tabel 4.3 Perbandingan Performansi Metode <i>Widder</i> dan Metode <i>Gaver-Stahfest</i> . . . . .	41



## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN A Tabel Average Error Relative Fungsi Sin $t$ . . . . .	33
LAMPIRAN B Tabel Average Error Relative Fungsi Cos $t$ . . . . .	37
LAMPIRAN C Tabel Average Error Relative Fungsi $e^{at}$ . . . . .	41
LAMPIRAN D Tabel Average Error Relative Fungsi $t^n$ . . . . .	45
LAMPIRAN E Tabel Average Error Relative Fungsi 1. . . . .	49
LAMPIRAN F Listing Program Fungsi Sederhana pada Sin $t$ . . . . .	57
LAMPIRAN G Listing Program Fungsi Sederhana pada Cos $t$ . . . . .	57
LAMPIRAN H Listing Program Fungsi Sederhana pada $t$ . . . . .	61
LAMPIRAN I Listing Program Fungsi Sederhana pada $e^t$ . . . . .	63
LAMPIRAN J Listing Program Fungsi Sederhana pada 1 . . . . .	65
LAMPIRAN K Listing Program Exercise Optimal American Put Option tanpa . . . . . Dividen pada Metode Widder . . . . .	67
LAMPIRAN L Listing Program Exercise Optimal . . American Put Option tanpa . . . . . Dividen pada Metode Gaver-Stahfest . .	67
LAMPIRAN M Biodata Penulis . . . . .	71



## Daftar Simbol

$\sigma$	volatilitas dari <i>underlying aset</i>
$r$	tingkat suku bunga
$S_f(p)$	Harga <i>exercise</i> optimal dalam ruang Laplace
$p$	variabel Laplace dalam rumus metode Widder
$F^{(k)}$	Turunan fungsi ke $k$ pada metode Widder
$\bar{a}_i$	Hasil invers numerik dari average error relatif pada waktu ke- $i$
$a_i$	Hasil analitik dari average error relatif pada waktu ke- $i$
$n$	Banyak titik sampel untuk menghitung nilai average error relatif
$\tau$	Waktu menuju habisnya suatu kontrak (time to expiry)
$S_f$	Harga <i>exercise</i> optimal
$\mathcal{L}$	Operator transformasi Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Operator invers transformasi Laplace
$F(s)$	Fungsi dalam transformasi Laplace





# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas hal-hal yang menjadi latar belakang permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan batasan masalah untuk memperoleh tujuan serta manfaat.

### 1.1 Latar Belakang

Transformasi Laplace adalah bentuk dari suatu fungsi yang digunakan untuk mengubah fungsi yang berada dalam ruang waktu  $f(t)$  ke dalam bentuk ruang Laplace  $F(s)$ . Hasil transformasi Laplace dari suatu fungsi waktu  $f(t)$  yaitu  $F(s)$  dapat dikembalikan lagi menjadi fungsi asalnya dengan diberikan simbol operator  $L^{-1}$  yang disebut invers dari transformasi Laplace. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi  $f(t)$  merupakan suatu invers transformasi Laplace dari  $F(s)$ .

Bentuk invers dari transformasi Laplace sulit diselesaikan melalui solusi analitik, karena terdapat suatu bentuk yang rumit dari penyelesaian pada ruang Laplace. Dalam menyelesaikan permasalahan ini, maka akan digunakan suatu metode pendekatan numerik dari invers transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi semianalitik [1].

Pendekatan numerik invers transformasi Laplace memiliki segi manfaat perhitungan dalam menyelesaikan suatu permasalahan, sehingga banyak penelitian yang dilakukan dalam menemukan suatu perhitungan penyelesaian invers transformasi Laplace dengan menggunakan pendekatan numerik pada permasalahan diberbagai aspek kebutuhan.

Salah satunya dalam perencanaan keuangan di bidang investasi. Investasi merupakan penanaman modal yang dilakukan oleh para investor dalam berbagai bidang usaha untuk memperoleh keuntungan di masa depan. Kegiatan investasi berlangsung di pasar uang dan pasar modal. Salah satu dari beberapa jenis pasar keuangan yang dikenal dalam dunia ekonomi, yaitu pasar derivatif. Pasar derivatif adalah pasar keuangan yang memperdagangkan instrumen keuangan yang nilainya diturunkan dari nilai aset lain. Instrumen yang diperjualbelikan dalam pasar derivatif, diantaranya berupa kontrak. Contoh kontrak yang paling populer diperdagangkan dalam pasar derivatif adalah *forward*, *future*, *option* [2].

*Option* (opsi) adalah salah satu kontrak keuangan yang memberikan hak kepada pembeli (call) opsi, tapi bukan kewajiban untuk menjual atau membeli dari pihak kedua yaitu penjual (put) terhadap suatu aset dasar dengan harga dan waktu yang telah ditetapkan. Hak tersebut diperoleh pembeli opsi dengan membayarkan sejumlah uang kepada penjual opsi yang dinamakan harga opsi. Berdasarkan waktu pengeksekusian, opsi terbagi menjadi 2 jenis yaitu *European style* dan *American style*. Opsi *European style* merupakan jenis opsi yang dapat dieksekusi saat masa opsi berakhir, sedangkan *American style* merupakan opsi yang akan dieksekusi dapat dilakukan kapanpun selama masa hidup opsi [3], sehingga didapatkan sebuah pengertian dari *American put option* yang merupakan kontrak keuangan diantara penjual dan pembeli opsi yang memberikan hak kepada pembeli (call) opsi, bukan kewajiban untuk menjual atau membeli dari pihak kedua yaitu penjual (put) terhadap suatu aset dasar pada waktu jatuh tempo sampai kapanpun [4].

Model *Black-Scholes* merupakan sebuah model yang berguna dalam menentukan harga opsi. Perhitungan harga

opsi dengan model *Black-Scholes* sangat diperlukan bagi investor dalam dunia pasar modal. Hal ini bertujuan untuk menilai apakah harga opsi yang terjadi di pasar sudah merupakan harga yang dianggap fair bagi opsi tersebut. *Fair* disini berarti nilai opsi yang diperdagangkan baik opsi jual maupun opsi beli akan memiliki nilai sebesar harga saham pada saat jatuh tempo. Dalam keadaan ini, terjadi peningkatan nilai selama masa opsi berlaku sampai jatuh tempo sebesar selisih nilai saham sekarang dengan saat jatuh tempo, sehingga kedua belah pihak baik penjual opsi maupun pembeli opsi tidak ada yang dirugikan. Seandainya harga opsi tidak sama dengan harga yang dihasilkan dari model *Black-Scholes* dalam penentuan harga opsi, hal itu akan menciptakan peluang bagi investor untuk mendapatkan keuntungan [3].

Pada tugas akhir ini dibahas mengenai American put option tanpa dividen dengan menggunakan salah satu metode pendekatan numerik invers transformasi Laplace yaitu metode Widder. Invers transformasi Laplace akan diperluas pada pola turunan ke- $k$  dengan variabel Laplace  $s$  melalui metode *Widder* yang digunakan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, didapatkan rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini yaitu bagaimana mendapatkan performansi metode *Widder* pada perhitungan nilai *American put option* tanpa dividen.

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Nilai *American put option* yang digunakan tanpa menggunakan dividen.
2. *Underlying asset* yang diperjualbelikan adalah saham.

3. Volatilitas harga saham konstan.
4. Suku bunga bank bebas resiko, konstan dan berlaku sepanjang waktu *option*.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan dalam penelitian ini adalah mendapatkan performansi metode *Widder* pada nilai *American put option* tanpa dividen.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat dalam penelitian ini adalah mendapatkan performansi penggunaan metode *Widder* melalui pendekatan numerik invers transformasi Laplace pada *American put option* tanpa dividen, sehingga dapat digunakan sebagai dasar acuan bagi penelitian selanjutnya.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan mengenai penelitian terdahulu dan teori-teori yang menunjang pada pembahasan antara lain penelitian terdahulu, metode *Widder*, *Option* dan persamaan differensial *Black-Scholes*.

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya, Davies dan Martin memberikan survei dan membandingkan perbedaan metode-metode untuk numerik invers transformasi Laplace yang sudah dilakukan kriteria pemilihan menggunakan evaluasi sejumlah teknik invers numerik yang berbeda. Kriteria yang digunakan adalah teknik pemilihan metode yang sesuai dan digunakan dalam mengevaluasi sejumlah teknik invers numerik yang berbeda dari tingkat keakurasian, efisiensi komputasi, dan kemudahan dalam mengaplikasi program. Beberapa metode yang dibandingkan antara lain menggunakan metode *Gaver-Stahfest*, *Week*, *Schapery*, *Widder*, *Durbin* dan *Popoulis*. Hasil penelitian mereka menunjukkan bahwa, metode *Widder* memiliki tingkat akurasi yang tinggi. Tingkat akurasi yang tinggi didapat dari uji hasil pendekatan metode numerik ke solusi analitik, sehingga akan didapat bentuk  $f(t)$  yaitu dengan menggunakan pendekatan metode numerik dan memasangkan parameter yang akan memberikan hasil pendekatan numerik pada uji  $F(s)$ [5].

Li-wei Chiang melakukan penelitian pada masalah aliran air tanah pada tingkat keakurasiannya. Penelitian yang

mereka lakukan yaitu dengan membandingkan 8 metode yang telah digunakan, antara lain metode *Gaver-Stahfest*, *Widder*, *Durbin*, *Popoulis*, *Schaperry*, *Weeks*, *Talbot* dan *Kozumi* untuk mendapatkan tingkat akurasi yang tinggi pada air tanah dengan menggunakan pendekatan numerik invers transformasi Laplace. Hasil penelitian yang didapat oleh Li-wei Chiang, bahwa semua metode memiliki tingkat efisiensi akurasi yang berbeda-beda. Pada metode *Widder* penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan solusi pada masalah air tanah melalui invers numeriknyadengan menggunakan metode *Widder* hasilnya menunjukkan bahwa tingkat akurasi yang didapat hasilnya kurang baik [6].

Jin-Zhang melakukan penelitian untuk menghitung nilai *American Put Option*, dengan menggunakan metode *Popoulis Legendre*, Kombinasi Linier *Kwok* dan *Barthez*, serta *Gaver-Stahfest*. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa, metode *Gaver-Stahfest* merupakan metode yang paling cocok digunakan untuk menghitung *American Put Option* pada penelitiannya Jin-Zhang, selain itu metode ini memiliki kemudahan dalam pengaplikasiannya daripada dua metode yang lain [7].

## 2.2 Metode *Widder*

Sifat dari sebuah deret operator-operator positif didefinisikan oleh rumus transformasi Laplace, yang dipelajari dalam memperoleh metode-metode dan digunakan dalam menyelesaikan invers transformasi Laplace diberikan sebagai berikut [8]:

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)$$

Pada rumus metode tersebut terdapat  $F^{(k)}$  yang merupakan fungsi turunan ke-k dari F. Variabel Laplace s dari metode

*Widder* disubstitusi menjadi  $(\frac{k}{t})$  dengan  $t > 0$ . Fungsi  $f(t)$  kontinu pada  $t$  dengan interval yang berada pada  $[0, \infty)$ .

## 2.3 Option

*Option* adalah salah satu kontrak keuangan yang memberikan hak kepada pembeli opsi, tapi bukan kewajiban untuk membeli atau menjual aset dasar (*underlying asset*) dari pihak kedua yaitu penjual dengan harga yang ditentukan (*exercise price/strike price*) di awal dan dilakukan pada saat atau sebelum masa opsi berakhir (*expiration date/maturity date*) [3].

*Option* merupakan contoh kontrak yang diperdagangkan dalam pasar derivatif selain *forward* dan *future*. Pasar derivatif merupakan sebuah pasar yang memperjualbelikan instrumen turunan berupa nilai aset dasar dari adanya suatu kontrak. Melalui pasar derivatif kegiatan investasi dapat berlangsung, seperti menanamkan modal. Penanaman modal dilakukan oleh para investor dalam berbagai bidang usaha untuk memperoleh keuntungan yang besar di masa akan datang, namun tidak akan menutup kemungkinan juga resiko akan gagal selalu ada dalam investasi tersebut. Keberhasilan suatu investasi tidak terlepas dari kemampuan dan pengetahuan investor dalam mengolah informasi yang tersedia di pasar modal. Hak opsi diperoleh pembeli opsi dengan membayarkan sejumlah uang kepada penjual opsi yang dinamakan harga opsi.

### 2.3.1 Istilah-istilah dalam *option*

Komponen-komponen yang mendasari *option* dapat diuraikan sebagai berikut:

#### 1. *Holder*

*Holder* adalah pihak yang membeli kontrak opsi.

2. *Writer*

*Writer* adalah pihak yang menjual kontrak opsi.

3. *Strike price/exercise price*

*Strike price/exercise price* adalah harga yang harus dibayarkan *holder* kepada *writer* jika mengeksekusi opsi.

4. *Expiration date/maturity date*

*Expiration date/maturity date* adalah tanggal pada kontrak option yang dapat dilaksanakan transaksi (*exercise*) atau tanggal pada kontrak *option* yang diberikan kepada pemegang hak. Setelah melewati *expiration date*, maka option dinyatakan kadaluarsa atau tidak dapat di-*exercise*.

5. *Payoff*

*Payoff* adalah sejumlah nilai yang diterima *holder* saat masa opsi berakhir.

6. *Harga Opsi*

*Harga Opsi* adalah harga awal yang diberikan *holder* ke *writer* untuk memperoleh hak opsi.

7. *Underlying asset*

*Underlying asset* adalah aset mendasar yang diperjualbelikan dalam transaksi *option*. *Option* hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas tertentu dan indeks-indeks yang disetujui.

### 2.3.2 Mekanisme *option*

Terdapat dua jenis option berdasarkan bentuk hak yang terjadi antara lain:

1. *Call option*

*Call option* adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk membeli suatu



asset dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *call option* yaitu *call option buyer* dan *call option seller*.

## 2. *Put option*

*Put option* adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual suatu asset dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *put option* yaitu *put option buyer* dan *put option seller*.

### 2.3.3 Tipe *option*

Berdasarkan waktu *exercise*-nya, opsi dibedakan menjadi 2 macam, *European style option* dan *American style option*[3]. Kedua macam gaya opsi ini tidak sama dalam bagaimana cara penanganannya pada saat menggunakan *option*. Dengan menggunakan *option*, berarti kita menggunakan hak untuk membeli atau menjual aset-aset yang ada. *American style option* memberikan kesempatan kepada pemegang opsi untuk meng-*exercise* haknya setiap saat hingga waktu jatuh tempo, berbeda dengan *European style option* yang hanya bisa die-*exercise* pada waktu jatuh tempo.

Kefleksibilitas dalam meng-*exercise* hak dari *American Style Option* inilah yang membuat harganya lebih mahal daripada *European Style Option*. Hal ini mengakibatkan munculnya permasalahan baru, sehingga harus dapat ditemukan cara yang tepat dalam memberikan harga pada kefleksibilitasnya tersebut. Harga *option* memiliki beberapa jenis faktor yang mempengaruhinya, antara lain:

#### 1. Harga *underlying asset*

Harga *asset* yang mendasarinya (*underlying asset*) dijadikan patokan dalam menentukan harga *option*. Harga suatu *call option* akan semakin tinggi apabila

harga *underlying asset*-nya juga semakin tinggi, dan sebaliknya harga *put option* akan semakin tinggi apabila *underlying asset*-nya semakin rendah. Hal ini menunjukkan bahwa, harga *underlying asset* berbanding lurus dengan harga *call option* dan berbanding terbalik dengan harga *put option*.

## 2. *Moneyness*

*Moneyness* merupakan perbedaan antara harga *underlying asset* saat ini dengan *strike price*. Suatu *put option* dan *call option* akan memiliki nilai apabila berada pada kondisi *in the money*, sehingga harga *put option* tersebut semakin meningkat apabila *strike price*-nya tinggi dan berlaku sebaliknya pada *call option*.

## 3. Jangka waktu jatuh tempo

Jangka waktu jatuh tempo mempengaruhi harga *option*. Semakin panjang *time to expiry*, semakin tinggi harga *call option*, sedangkan harga *put option* semakin rendah

## 4. Volatilitas

Volatilitas atas *underlying asset* adalah ukuran tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying asset* tersebut dimasa datang. Jika semakin meningkat maka akan semakin meningkat pula peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau malah penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin bergerak naik turun) semakin tinggi nilai *call option* dan *put option*.

## 5. Tingkat suku bunga bebas risiko/*risk free interest rate*

Tingkat suku bunga bebas risiko/*risk free interest rate* juga mempengaruhi harga suatu *option*. Jika *interest rate* dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan harga suatu

*underlying asset.* Harga *put option* akan menurun dengan adanya peningkatan *risk free interest rate*. Begitu pula sebaliknya, *call option* akan meningkat.

## 2.4 Formula Harga *Exercise Optimal*

Berikut ini merupakan sistem persamaan diferensial pada penurunan persamaan rumus harga *exercise optimal* yang sudah dilakukan penelitian oleh Shong Ping Zu [10] sebagai berikut:

$$\begin{cases} \bar{U}(p\bar{S}_f, p) = 0, \\ \frac{d\bar{U}}{dS}(p\bar{S}_f, p) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} -p\bar{U} - 0 + S^2 \frac{d^2\bar{U}}{dS^2} + \gamma S \frac{d\bar{U}}{dS} - \gamma\bar{U} = 0 \\ \lim_{S \rightarrow \infty} \bar{U}(S, p) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \bar{U}(1^-, p) = \bar{U}(1^+, p) \\ \frac{d\bar{U}}{dS}(1^-, p) = \frac{d\bar{U}}{dS}(1^+, p) + \frac{1}{p} \end{cases} \quad (2.3)$$

$p$  merupakan variabel Laplace, dengan menggunakan solusi dari sistem persamaan diferensial. Solusi dari Persamaan (2.2) dan Persamaan (2.3) dapat ditemukan sebagai berikut :

$$\bar{U} = \begin{cases} D_1 S^{q_1} + D_2 S^{q_2} - \frac{\gamma}{p(p+\gamma)}, & \text{jika } S_f \leq S < 1 \\ D_3 S^{q_1} + D_4 S^{q_1}, & \text{jika } S \geq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

dengan  $q_1$  dan  $q_2$  merupakan akar persamaan karakteristik homogen dari persamaan penurunan rumus formula harga *exercise optimal* sebagai berikut :

$$q_{1,2} = \frac{1-\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2} + (p+\gamma)} \quad (2.5)$$

$D_1, D_2, D_3, D_4$  merupakan bentuk konstan yang dapat berubah untuk menentukan kondisi batas. Bentuk dari Persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk yang berbeda sebagai berikut:

$$q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + (p + \gamma)} \quad b = \frac{1 - \gamma}{2}.$$

Sehingga didapatkan persamaan formula harga *exercise* optimal dari *American put option* tanpa dividen dalam ruang Laplace diberikan sebagai berikut [10] :

$$\bar{S}_f(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right] \frac{1}{q_1} \quad (2.6)$$

dengan :

- $\bar{S}_f$  = harga *exercise* optimal,
- $r$  = tingkat suku bunga,
- $\sigma$  = volatilitas dari *underlying asset*,

## BAB III

### METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis dan diagram alur penelitian yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir, yang terdiri dari :

#### 3.1 Tahap Penelitian

1. Studi literatur  
Pada tahap ini dilakukan pengumpulan teori pendukung mengenai metode *Widder* dan *American put option* tanpa dividen.
2. Kajian rumus metode *Widder*  
Pada tahap ini dilakukan pengkajian pada rumus metode *Widder* yang digunakan untuk mendapatkan nilai *American put option* tanpa dividen.
3. Uji coba fungsi sederhana  
Pada tahap ini dilakukan simulasi uji coba pada beberapa fungsi sederhana transformasi Laplace untuk mengetahui tingkat akurasi dari metode *Widder*.
4. Aplikasi formula harga *exercise* optimal pada metode *Widder*  
Pada tahapan ini, dilakukan simulasi metode *Widder* pada perhitungan nilai *American put option* tanpa dividen. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB.
5. Analisis performansi metode *Widder*  
Pada tahap ini dilakukan analisa performansi dari

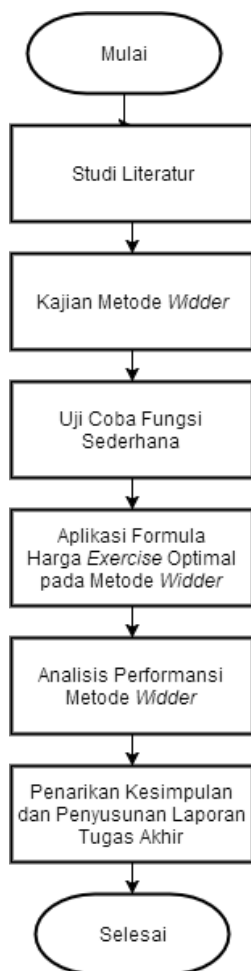
simulasi yang telah dilakukan untuk mengetahui performansi metode *Widder* dalam mendapatkan perhitungan nilai *American put option* tanpa dividen.

6. Penarikan Kesimpulan dan Penyusunan Laporan

Dalam tahapan akhir penelitian ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, selanjutnya penulis melakukan penyusunan laporan ini sesuai dengan sistematika penulisan.

### 3.2 Alur Penelitian

Berikut ini adalah alur penelitian yang dilakukan dalam penelitian Tugas Akhir ini.



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian





## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penerapan metode *Widder* untuk menghitung nilai *American Put Option* tanpa dividen. Pembahasan ini terdiri dari kajian metode *Widder*, uji coba fungsi sederhana, aplikasi formula harga exercise optimal untuk mendapatkan nilai *American Put Option* tanpa dividen, kemudian dilanjutkan dengan analisa performansi pada metode *Widder*.

### 4.1 Kajian Rumus Metode *Widder*

Pada tahap ini dilakukan langkah kajian rumus dari metode *Widder* yang digunakan untuk mendapatkan nilai *American put option* tanpa dividen, dan definisikan transformasi laplace sebagai berikut :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

Diberikan sebuah fungsi  $\phi(t)$  dan dinotasikan sebagai fungsi transformasi laplace  $s$  dengan  $\phi(s)$ .

$$\phi(t) = e^{-st} f(t) \quad (4.2)$$

Didefinisikan fungsi  $g_k(t)$  untuk  $t \geq 0$  dan  $k \in \mathbb{Z}$  sebagai berikut :

$$g_k(t) = \frac{k^{k+1}}{k!} t^k e^{-kt} \quad (4.3)$$

$g_k(t)$  merupakan fungsi kepadatan peluang, dengan menggunakan integral bagian pada persamaan  $g_k(t)$  sehingga

diperoleh:

$$\int_0^{\infty} g_k(t) dt = 1 \quad (4.4)$$

$g_k(t)$  maksimum tunggal untuk semua  $k > 0$  pada  $t=1$ , sehingga  $g_k(1) = \frac{k^{k+1}e^{-k}}{k!}$  dengan  $k$  bilangan positif sehingga:

$$g_k(t) \leq kt^k e^{k(1-t)} \quad (4.5)$$

Terdapat  $\phi(t)$  kontinyu dengan  $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0)$  sedemikian hingga  $|\phi(t) - \phi(1)| < \epsilon$  sehingga didapatkan :

$$\begin{aligned} |t - 1| &< \delta \\ -\delta &< t - 1 \leq \delta \\ 1 - \delta &< t - 1 + 1 < \delta + 1 \\ 1 - \delta &< t < \delta + 1 \end{aligned}$$

**Lemma 4.1** Terdapat  $\delta$  dengan  $0 < \delta < 1$  dan  $b \in \mathcal{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1-\delta} g_k(t) e^{bt} dt = 0 \quad (4.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t) e^{bt} dt = 0 \quad (4.7)$$

Berikut ini dapat dibuktikan Persamaan (4.6) dengan definisi fungsi berikut:

$$h(t) = te^{1-t} \quad (4.8)$$

Fungsi  $h(t)$  untuk  $t > 0$  mempunyai nilai maksimum pada  $t = 1$ . Pada fungsi  $h(t) < 1$  untuk  $t \neq 1$  pada  $t \in (0, 1)$  diperoleh:

$$h(t) \leq h(1 - \delta) < 1 \quad (4.9)$$

Dari Persamaan (4.5) pada fungsi  $g_k(t) \leq k(h(t))^k$  pada  $0 \leq t \leq 1 - \delta$ , diberikan  $m = \max(1, e^{b(1+\delta)})$  sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{1-\delta} g_k(t) e^{bt} dt &\leq k \int_0^{1-\delta} (h(t))^k e^{bt} dt \\ &< mk \int_0^{1-\delta} (h(1-\delta))^k dt \\ &= mk(1-\delta)(h(1-\delta))^k \end{aligned} \quad (4.10)$$

Karena pada Persamaan (4.10) terdapat  $0 < h(1-\delta) < 1$ , maka diperoleh ruas kanan mendekati 0 untuk  $k \rightarrow \infty$  persamaan diatas menjadi :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1-\delta} g_k(t) e^{bt} dt = 0$$

Setelah didapatkan pembuktian pada Persamaan (4.6) dari langkah-langkah yang dilakukan diatas, selanjutnya dapat dibuktikan juga Persamaan (4.7) menggunakan definisi Persamaan (4.8) yang terdapat a pada  $0 < a < 1$ , untuk semua  $t > \frac{1}{1-a}$  diperoleh :

$$h(t) < \frac{1}{1-a} e^{-at} \quad (4.11)$$

Dari Persamaan (4.5) dan Persamaan (4.11) dihasilkan:

$$g_k(t) e^{bt} < k \left( \frac{1}{1-a} \right)^k e^{(b-ka)t} \quad (4.12)$$

untuk semua  $t > \frac{1}{1-a}$ , diberikan  $a_0 = \frac{\delta}{1+\delta}$  dengan  $a < a_0$  sehingga dalam bentuk persamaan aljabar yang sederhana didapatkan  $\frac{1}{1-a} < 1 + \delta$ , dan dengan menggunakan

Persamaan (4.12) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \int_{1+\delta}^{\infty} g_k(t) e^{bt} dt &< k \left( \frac{1}{1-a} \right)^k \int_{1+\delta}^{\infty} e^{(b-ka)t} dt \quad (4.13) \\
 &= k \left( \frac{1}{1-a} \right)^k \left( \frac{e^{(b-ka)(1+\delta)}}{ka-b} \right) \\
 &= \frac{e^{b(1+\delta)}}{a} \left( \frac{e^{-a(1+\delta)}}{1-a} \right)^k
 \end{aligned}$$

untuk  $\delta > 0$  dengan semua nilai  $a$  positif dapat dipenuhi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-a(1+\delta)}}{1-a} &< 1 = \ln e^{-a(1+\delta)} < \ln(1-a) \\
 &= -a(1+\delta) < \ln(1-a) \\
 &= (1+\delta) > -\left( \frac{-\ln(1-a)}{a} \right) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Fungsi  $\phi(a) = \frac{-\ln(1-a)}{a}$  dengan  $\lim_{a \rightarrow 0} \phi(a) = 1, \phi'(a) > 0$  untuk  $0 < a < 1$ , dan  $\lim_{a \rightarrow 1} \phi(a) = \infty$  sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\phi(a) = 1 + \delta \quad (4.15)$$

untuk menyelesaikan pembuktian pada Persamaan (4.7), selanjutnya dipilih  $a < \min(a_0, a_1)$  pada Persamaan (4.15) diatas, dan diberikan  $d = \frac{e^{-a(1+\delta)}}{1-a} < 1$  sehingga didapatkan :

$$0 < \int_{1+\delta}^{\infty} g_k(t) e^{bt} dt < \frac{e^{b(1+\delta)}}{a} dk \quad (4.16)$$

karena  $0 < d < 1$  dalam ruas kanan mendekati 0 untuk  $k \rightarrow \infty$ , sehingga Persamaan (4.10) dapat dibuktikan dengan

didapatkan:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t) e^{bt} dt = 0$$

Berdasarkan Lemma (4.1) dan Persamaan (4.4) diperoleh persamaan berikut:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) dt = 1 \quad (4.17)$$

pada fungsi  $\phi(t)$  dan  $g_k(t)$ , dengan  $\phi(t)$  fungsi kontinyu didefinisikan untuk  $t \geq 0$  didapatkan :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g_k(t) \phi(t) dt - \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) \phi(1) dt &= \int_0^{1-\delta} g_k(t) \phi(t) dt + \\ &\int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) \phi(t) dt + \int_{1+\delta}^\infty g_k(t) \phi(t) dt - \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) \phi(1) dt \\ \int_0^\infty g_k(t) \phi(t) dt - \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) \phi(1) dt &= \int_0^{1-\delta} g_k(t) \phi(t) dt + \\ &\int_{1+\delta}^\infty g_k(t) \phi(t) dt + \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t) [\phi(t) - \phi(1)] dt \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga persamaan diatas

dapat menjadi:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty g_k(t)\phi(t)dt - \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\phi(1)dt \right| \leq \left| \int_0^{1-\delta} g_k(t)\phi(t)dt \right| + \\
& \quad \left| \int_{1+\delta}^\infty g_k(t)\phi(t)dt \right| + \left| \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)[\phi(t) - \phi(1)]dt \right| \\
& \left| \int_0^\infty g_k(t)\phi(t)dt - \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\phi(1)dt \right| \leq \epsilon \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\phi(t)dt + \\
& \quad \left| \int_0^{1-\delta} g_k(t)\phi(t)dt \right| + \left| \int_{1+\delta}^\infty g_k(t)\phi(t)dt \right| \\
& \quad \left| \int_{1+\delta}^\infty g_k(t)\phi(t)dt \right| + \left| \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)[\phi(t) - \phi(1)]dt \right|
\end{aligned}$$

dari Lemma (4.1) dan terdapat  $\phi$  yang merupakan fungsi eksponensial sehingga didapatkan dua integral terakhir diruas kanan mendekati 0 untuk  $k \rightarrow \infty$  serta dengan mensubstitusi Persamaan (4.17) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t)\phi(t)dt - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\phi(1)dt \right| = 0 \\
& \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t)\phi(t)dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{1-\delta}^{1+\delta} g_k(t)\phi(1)dt \\
& \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t)\phi(t)dt = (1)\phi(1) \\
& \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t)\phi(t)dt = \phi(1) \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Substitusi fungsi  $g_k(t)$  dan  $\phi(t)$  dalam Persamaan (4.18)

sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
 \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k g_k(t) \phi(t) dt \\
 \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left( \frac{k^{k+1} t^k e^{-kt}}{k!} \right) (e^{-st} f(t)) dt \\
 \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^k t^k e^{-kt} e^{-st} f(t) dt \\
 \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1}}{k!} \mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t)) \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

pada Persamaan (4.19) diatas, untuk  $\mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t))$  diselesaikan perhitungannya terlebih dahulu dengan menggunakan tiga sifat dari penyelesaian transformasi Laplace antara lain :

1. Jika  $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ , maka untuk  $k=1,2,3,\dots$  berlaku  
 $\mathcal{L}t^k f(t) = (-1)^k F^{(k)}(s)$  sehingga  $\mathcal{L}^{-1}F^{(k)}(s) = (-1)^k t^k f(t)$
2. Jika  $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ , maka  $\mathcal{L}f(at) = \left(\frac{1}{a}\right) F\left(\frac{s}{a}\right)$  sehingga  
 $\mathcal{L}^{-1}F\left(\frac{s}{a}\right) = aF(at)$
3. Jika  $\mathcal{L}f(t) = F(s)$ , maka  $\mathcal{L}e^{-at}f(at) = F(s+a)$  sehingga  
 $\mathcal{L}^{-1}F(s+a) = e^{-at}f(t)$

Berikut ini penyelesaian dari  $\mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t))$  :

$$\mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t)) = \frac{d^k}{ds^k} [F(s)] \quad (4.20)$$

$$= \frac{d^k}{ds^k} [\mathcal{L}t^k f(t)] \quad (4.21)$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}[e^{-kt} f(t)] \quad (4.22)$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F[s+k] \quad (4.23)$$

untuk  $t_0 > 0$  didefinisikan fungsi  $f(t) = f(t_0 t)$  dan dengan menggunakan sifat penyelesaian transformasi Laplace kedua maka didapat:

$$\mathcal{L}[f(t_0 t)] = \frac{1}{t_0} F\left(\frac{s}{t_0}\right) \quad (4.24)$$

Dengan menggunakan sifat dari penyelesaian transformasi Laplace kesatu diatas, maka Persamaan (4.23) pada  $\frac{d^k}{ds^k} F[s + k]$  menjadi :

$$\frac{d^k}{ds^k} [F(s + k)] = \frac{1}{t_0^{k+1}} F^{(k)}\left(\frac{s + k}{t_0}\right) \quad (4.25)$$

Kemudian substitusi Persamaan (4.25) ke Persamaan (4.23) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t)) &= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} [F(s + k)] \\ &= (-1)^k \frac{1}{t_0^{k+1}} F^{(k)}\left(\frac{s + k}{t_0}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substitusi Persamaan(4.26) pada Persamaan (4.19):

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1}}{k!} \mathcal{L}(t^k e^{-kt} f(t)) \\ \phi(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1}}{k!} (-1)^k \frac{1}{t_0^{k+1}} F^{(k)}\left(\frac{s + k}{t_0}\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pada Persamaan (4.2) yaitu pada  $\phi(t) = e^{-st} f(t)$  dengan  $\phi(t)$  fungsi kontinu dan didefinisikan fungsi  $f(t) = f(t_0 t)$  untuk  $t=1$  sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{-st} f(t) \\ f(t) &= \phi(t) e^{s(t)} \\ f(1) &= \phi(1) e^{s(1)} \\ f(1) &= \phi(1) e^s \end{aligned} \quad (4.28)$$



Substitusi  $\phi(1)$  ke Persamaan (4.27) sehingga didapat :

$$\begin{aligned}
 f(1) &= e^s \phi(1) \\
 &= e^s \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1}}{k!} (-1)^k \frac{1}{t_0^{k+1}} F^{(k)} \left[ \frac{s+k}{t_0} \right] \\
 &= e^s \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \frac{k^{k+1}}{t_0^{k+1}} F^{(k)} \left[ \frac{s+k}{t_0} \right] \\
 &= e^s \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \left( \frac{k}{t_0} \right)^{k+1} F^{(k)} \left[ \frac{s+k}{t_0} \right] \\
 &= e^0 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \left( \frac{k}{t_0} \right)^{k+1} F^{(k)} \left[ \frac{0+k}{t_0} \right] \\
 &= 1 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \left( \frac{k}{t_0} \right)^{k+1} F^{(k)} \left[ \frac{k}{t_0} \right] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \left( \frac{k}{t_0} \right)^{k+1} F^{(k)} \left[ \frac{k}{t_0} \right] \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

untuk  $t_0 > 0$  didefinisikan fungsi  $f(t) = f(t_0 t)$  dengan  $t = 1$ , dan diperoleh  $f(1) = f(t)$  sehingga persamaan (4.29) diatas merupakan rumus dari metode *Widder* yang persamaannya ekivalen dengan :

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1^k}{k!} \left( \frac{k}{t} \right)^{k+1} F^{(k)} \left[ \frac{k}{t} \right] \tag{4.30}$$

## 4.2 Uji Coba Fungsi Sederhana

Tingkat akurasi dari suatu metode perlu diuji dari suatu perhitungan uji coba yang dilakukan. Pada tahap ini, uji coba tersebut dilakukan dengan menggunakan beberapa fungsi sederhana yang selanjutnya dilakukan perhitungan dalam bentuk invers transformasi Laplace yaitu pada fungsi sederhana  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $t$ ,  $e^t$ , 1, dan berikut ini merupakan fungsi sederhana yang digunakan tersebut dalam bentuk

invers transformasi Laplace :

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) \quad (4.31)$$

$$\cos t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) \quad (4.32)$$

$$t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (4.33)$$

$$e^t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - 1}\right) \quad (4.34)$$

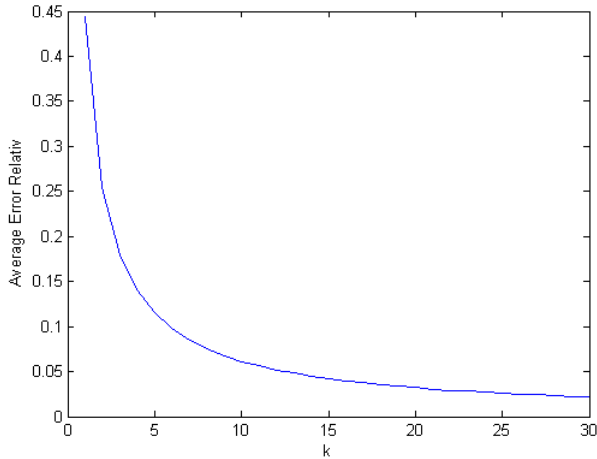
$$1 = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (4.35)$$

Hasil dari numerik invers transformasi Laplace akan digunakan untuk mendapatkan tingkat akurasi dari metode *Widder* melalui setiap fungsi sederhana yang akan diuji dengan perhitungan nilai rata-rata error relatifnya. Rata-rata error relatif yang diperhitungkan tersebut didefinisikan dengan rumus sebagai berikut :

$$AverageErrorRelatif = \left(\sum_{i=1}^n |(\bar{a}_i - a_i)|/a_i\right)/n \quad (4.36)$$

dengan  $\bar{a}_i$  adalah hasil dari invers numerik, selain itu  $a_i$  juga merupakan hasil analitik pada waktu ke- $i$  serta  $n$  merupakan banyaknya jumlah titik sampel yang dihitung. Perhitungan nilai rata-rata error relatif pada tahap uji coba fungsi sederhana ini dilakukan menggunakan parameter  $k$  yang makin besar menuju tak hingga sesuai pada rumus dari metode *Widder*, namun dalam uji coba ini penulis mengambil batasan terambilnya parameter  $k$  yang diuji yaitu dari  $k=1$  sampai  $k=30$ . Dalam melihat kesesuaian metode dengan permasalahan *option*, maka titik waktu yang diambil dibatasi pada nilai yang kecil dengan interval nilai waktu  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun, untuk nilai

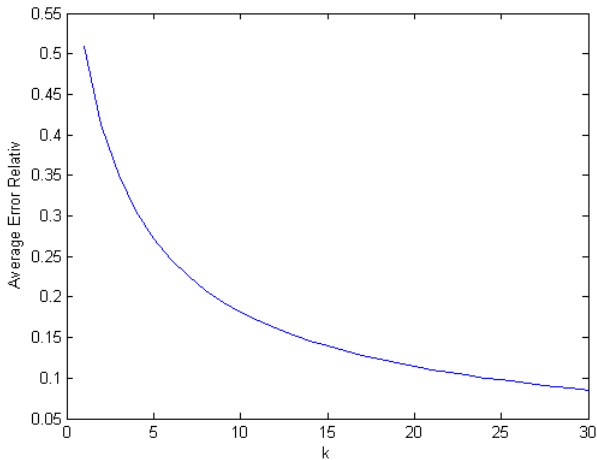
input setiap fungsi sederhana. Berikut ini merupakan grafik pada kelima fungsi sederhana ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 4.1: Plot Nilai Rata-Rata  $f(t) = \sin t$

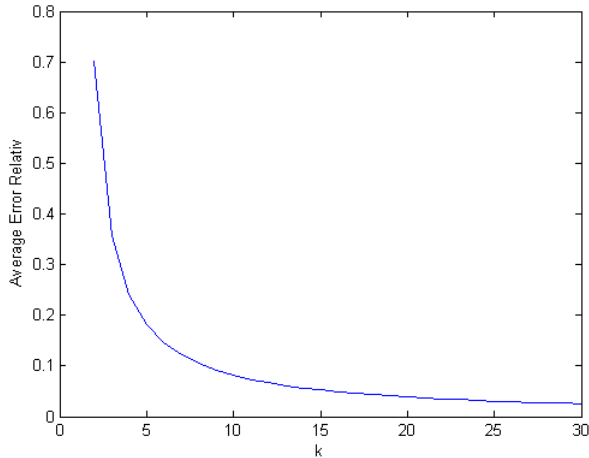
Plot grafik pada Gambar (4.1) merupakan hasil uji coba fungsi sederhana pada persamaan (4.8) yaitu untuk fungsi sederhana  $f(t) = \sin t$  pada nilai Average Error Relatif terhadap nilai parameter  $k$ . Fungsi ini memiliki tingkat akurasi yang baik pada nilai parameter  $k$  yang diuji yaitu  $k = 1$  sampai dengan  $k = 30$  pada  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter  $k$  yang diuji, nilai Average Error Relatif yang diperoleh semakin kecil.

Plot grafik pada Gambar (4.2) merupakan hasil



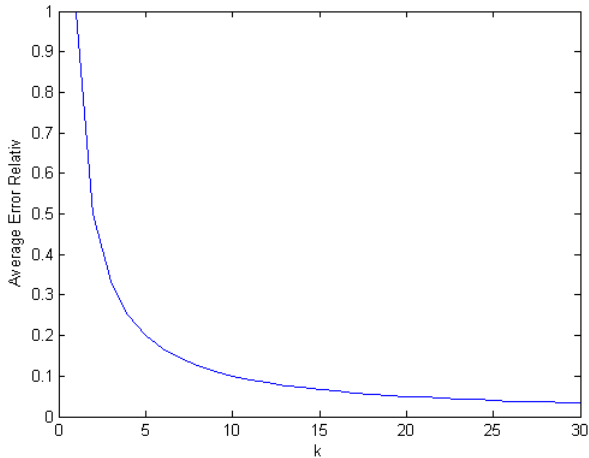
Gambar 4.2: Plot Nilai Rata-Rata  $f(t)=\cos t$

uji coba fungsi sederhana pada persamaan (4.9) yaitu untuk fungsi sederhana  $f(t)=\cos t$  pada nilai Average Error Relatif terhadap nilai parameter  $k$ . Fungsi ini memiliki tingkat akurasi yang baik pada nilai parameter  $k$  yang diuji yaitu  $k = 1$  sampai dengan  $k=30$  pada  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter  $k$  yang diuji, maka nilai Average Error Relatif yang diperoleh semakin kecil.



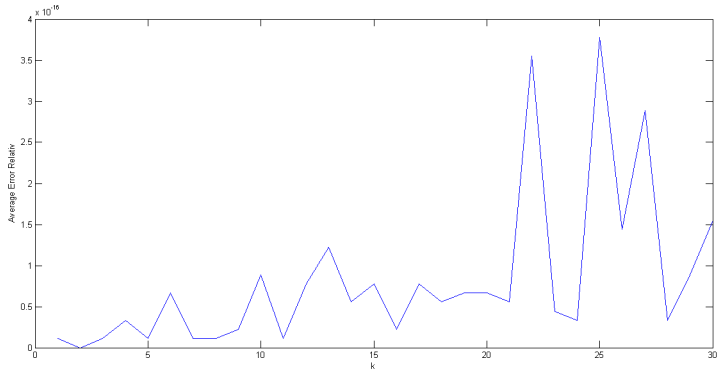
Gambar 4.3: Plot Nilai Rata-Rata  $f(t) = e^t$

Plot grafik pada gambar (4.3) merupakan hasil uji coba fungsi sederhana pada persamaan (4.11) yaitu untuk fungsi sederhana  $f(t) = e^t$  pada nilai Average Error Relatif terhadap nilai parameter  $k$ . Fungsi ini memiliki tingkat akurasi yang baik pada nilai parameter  $k$  yang diuji yaitu  $k=1$  sampai dengan  $k=30$  pada  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter  $k$  yang diuji, nilai Average Error Relatif yang diperoleh semakin kecil.



Gambar 4.4: Plot Nilai Rata-Rata  $f(t) = t$

Plot grafik pada gambar (4.4) merupakan hasil uji coba fungsi sederhana pada persamaan (4.10) yaitu untuk fungsi sederhana  $f(t) = t$  pada nilai Average Error Relatif terhadap nilai parameter  $k$ . Fungsi ini memiliki tingkat akurasi yang baik pada nilai parameter  $k$  yang diuji yaitu  $k = 1$  sampai dengan  $k = 30$  pada  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa semakin besar nilai parameter  $k$  yang diuji, nilai Average Error Relatif yang diperoleh semakin kecil.



Gambar 4.5: Plot Nilai Rata-Rata  $f(t)=1$

Plot grafik pada gambar (4.5) merupakan hasil uji coba fungsi sederhana pada persamaan (4.10) yaitu untuk fungsi sederhana  $f(t)=1$  pada nilai *Average Error Relatif* terhadap nilai parameter k. Fungsi ini memiliki tingkat akurasi yang baik pada nilai parameter k yang diuji yaitu  $k = 1$  sampai dengan  $k = 30$  pada  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$  tahun. Pada fungsi ini meskipun semakin besar nilai parameter k yang diuji tidak menunjukkan hasil perolehan nilai *Average Error Relatif* yang diperoleh semakin kecil, namun tetap memiliki tingkat akurasi yang baik karena memiliki perolehan nilai *Average Error Relatif* yang sangat kecil nilainya dibandingkan dengan ke empat fungsi sederhana lain yang diujikan.

Berdasarkan hasil hasil rata-rata error relatif yang diperoleh menunjukkan bahwa metode *Widder* memiliki tingkat akurasi yang baik yaitu dari semakin besarnya nilai k yang diuji, hasil dari rata-rata error relatif yang diperoleh semakin kecil.

### 4.3 Aplikasi Formula Harga *Exercise* Optimal pada Metode *Widder*

Pada tahap ini dilakukan perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen menggunakan rumus analitik. Rumus analitik tersebut diperoleh dari harga *exercise* optimal *American Put Option* yang sudah dilakukan transformasi Laplace persamaan harga *exercise* optimal, yaitu pada Persamaan (2.1).

Perhitungan yang diperoleh penulis pada metode *Widder* selanjutnya dilakukan perbandingan dengan hasil perhitungan yang sudah dilakukan oleh Shong Ping Zu. Harga *exercise* optimal yang dihasilkan oleh perhitungan Shong Ping Zu memiliki hasil nilai yang selisihnya tidak jauh berbeda dari hasil perhitungan harga *exercise* optimal pada metode *Widder*. Perhitungan harga *exercise* optimal yang diperoleh dari perhitungan Shong Ping Zu menghasilkan  $S_f(\tau) = 0.99$ , sedangkan pada perhitungan oleh metode *Widder* memperoleh nilai  $S_f(\tau) = 0.9814$ .

Perhitungan harga *exercise* optimal pada penelitian ini serta perhitungan yang dilakukan oleh Shong Ping Zu, menggunakan tingkat suka bunga  $r = 0.1$ , Volatilitas  $\sigma = 0.3$ , strike price  $X = 100\$$ , serta digunakan waktu kontrak opsi  $T$  pada penelitian ini berlaku sampai 1 tahun, dengan waktu menuju habisnya kontrak  $\tau = 0,00001$ . Perhitungan ini menggunakan  $\bar{S}_f$  melalui metode *Widder* yang berada dalam ruang Laplace untuk mendapatkan  $S_f$  dalam ruang waktu sehingga didapatkan performansi dari metode *Widder*.

Kemudian akan ditunjukkan hasil perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen yang dilakukan oleh penulis dengan menggunakan perhitungan numerik invers transformasi Laplace metode *Widder* pada nilai parameter  $k$  dari  $k=1$  sampai  $k=5$  antara lain :



Tabel 4.1: Harga *Exercise* Optimal dengan Metode *Widder*

Parameter k	$S_f(\tau)$
1	0.9782
2	0.9801
3	0.9808
4	0.9812
5	0.9814

Dari Tabel 4.1 diperoleh hasil perhitungan harga exercise optimal pada nilai parameter k dari 1 sampai 5 dengan hasil yang diperoleh tidak memiliki selisih yang jauh berbeda, serta hasil dari harga exercise optimal yang didapat untuk nilai parameter k yang makin besar menunjukkan hasilnya semakin mendekati hasil nilai pada perhitungan analitik Shong Ping Zu yaitu sebesar 0,99. Namun nilai harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen pada kasus perhitungan untuk metode *Widder* ini hasil sebenarnya yaitu sebesar 0.9814 yang berada pada parameter k=5.

Diperolehnya parameter k=5 tersebut berasal dari adanya faktor dengan dimasukkannya parameter k menuju tak hingga sesuai formula metode *Widder* pada bentuk awal, *running* program yang berjalan pada perhitungan harga *exercise* optimal membutuhkan waktu yang lama, oleh karena itu pada penelitian ini dilakukan menggunakan k dengan inputan untuk mendapatkan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen. Pertimbangan terambilnya k yang nilainya relatif kecil pada tahap perhitungan harga *exercise* optimal dari metode *Widder* ini sangat diperlukan, sehingga pada parameter k=5 didapatkan hasil dari harga *exercise* optimal pada metode *Widder*.

#### 4.4 Analisa Performansi Metode *Widder*

Dalam sub bab ini dilakukan pembahasan analisa performansi metode *Widder* pada perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen. Metode *Widder* dianggap memiliki tingkat akurasi yang tinggi oleh penelitian yang dilakukan Davies dan Martin [5] pada perbandingan numerik invers transformasi Laplace. Hal ini yang menjadi dasar metode *Widder* dipilih dalam penelitian ini untuk menjadi salah satu metode yang dapat diterapkan dalam menghitung nilai *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen.

Performansi metode *Widder* ini selanjutnya diperoleh dengan membandingkan hasil perhitungan numerik invers transformasi Laplace yang diterapkan pada penelitian ini menggunakan metode *Widder* dengan penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya menggunakan metode lain yang berbeda. Penelitian sebelumnya sudah dilakukan oleh Jin Zhang [7] pada masalah perhitungan *American Put Option* dengan menggunakan metode *Gaver Stahfest* yang merupakan salah satu metode numerik invers transformasi Laplace. Perhitungan pada penelitian ini menggunakan software MATLAB untuk diperoleh performansi dari metode *Widder*. Nilai parameter yang digunakan untuk perhitungan tersebut antara lain : volatilitas  $\sigma = 0.3$ , tingkat suku bunga  $r = 0.1$ , *strike price*  $X = 100$  \$, waktu kontrak opsi T berlaku selama 1 tahun. Pada Tabel 4.3 ditunjukkan performansi dari metode *Widder* dan juga metode *Gaver-Stahfest* dalam memperoleh nilai *American Put Option* tanpa dividen dengan menggunakan *time to expiry*  $\tau = 0.00001$ .

Tabel 4.2: Perbandingan Performansi Metode *Widder* dan Metode *Gaver-Stahfest*

Metode	Sf(\$)	Kecepatan Komputasi (s)
Gaver-Stahfest	98.23	0.003889
Widder	98.14	303.257013

Tabel 4.2 merupakan hasil perbandingan dari 2 metode yang digunakan dalam menganalisa performansi metode *Widder*. Untuk mengetahui performansi metode *Widder*, dalam hal ini penulis melakukan perbandingan hasil performansi yaitu pada kecepatan komputasi dan mendapatkan hasil *American Put Option* tanpa dividen yang didapat dari tiap metode. Metode *Gaver-Stahfest* dipilih sebagai pembanding performansi dari metode *Widder*, karena metode *Gaver-Stahfest* sebagai salah satu metode numerik invers transformasi Laplace dapat diterapkan pada penelitian yang dilakukan Jin Zhang [7] untuk menghitung nilai *American Put Option* dengan dividen.

Hasil yang diperoleh pada perbandingan performansi metode *Widder* dan metode *Gaver Stahfest*, menunjukkan bahwa nilai  $S_f$  yang dihasilkan metode *Widder* lebih kecil dibandingkan nilai  $S_f$  yang dihasilkan oleh metode *Gaver-Stahfest*. Begitu juga dengan hasil kecepatan komputasi yang didapat dari metode *Widder* hasilnya lebih lambat dari kecepatan komputasi yang diperoleh *Gaver-Stahfest*.

Pada hasil performansi yang diperoleh menunjukkan bahwa, metode *Widder* merupakan salah satu metode numerik invers transformasi Laplace yang baik digunakan dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen. Namun dibutuhkan waktu yang lama untuk memperoleh hasil *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen dengan menggunakan metode *Widder* pada nilai parameter  $k$  yang makin besar.



## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan kesimpulan dari Tugas Akhir ini adalah diperoleh perhitungan harga exercise optimal American Put Option tanpa dividen pada metode *Widder*, dengan hasil dari  $S_f = 98.14\$$  dan kecepatan komputasi yang didapat selama 303.257013 detik.

### 5.2 Saran

Tugas Akhir ini menggunakan nilai dividen sama dengan nol, sehingga nilai dividen tidak diperhitungkan dalam perhitungan harga *exercise* optimal *American Put Option* tanpa dividen. Untuk penelitian selanjutnya disarankan menggunakan nilai dividen tidak sama dengan nol, sehingga dapat diketahui adanya pembagian laba kepada pemegang saham yang dimiliki.



## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wong, Q and Zhan, H. (2014). **On different Numerical Invers Laplace Methods for Solute Transport Problems**". Advances in Water Resources 75 ; 80-92.
- [2] Khuriyanti.(2009. **Penentuan Harga Opsi Asia**".FMIPA UI.
- [3] Prahmana, R dan Sumardi. (2013). **Penentuan Harga Opsi untuk Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga**. Crank Nicolson.
- [4] Lauko Martin and Sevcovic Daniel. (2010). **Comparison of Numerical and Analytical Approximations of the Early Exercise Boundary of the American Put Option**.Dept.
- [5] Davies, B and Martin, B. (1979). **Numerical Inversion of the Laplace Transform**. Journal of Computational Physics.Vol. 33, No.1.
- [6] Chiang, L. (1998). **The Application of Numerical Laplace Inversion Methode to Groundwater Flow and Solute Transport Problem**. (Thesis). Socorro; New Mexico Institute of Mining and Technology.
- [7] Zhang Jin. (2007). **Some Innovative Numerical Approaches for Pricing American Option**. University of Wollongong.

- [8] Bryan Kurt. (2000). **Elementary Inversion of the Laplace Transform**. AMS Subject Clasifications. 44A10.
- [9] Binatari N, Kusumawati, R, dan Latif Ade. (2013). **Penentuan Harga Saham Tipe Amerika dengan Pembagian Deviden Menggunakan Finite Element Methode**. Jurnal Penelitian Saintek, Vol 18, Nomor 2.
- [10] Ping Zhu, Song. (2006). **A New Analytical-Approximation Formula for the Optimal Exercise Boundary of American Put Option**. Faculty of Engineering and Information Sciences



**LAMPIRAN A**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Sin t**

k	<b>Error Relativ</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
1	0,963864	0,861498	0,708878	0,526714	0,334931
2	0,490048	0,460751	0,413728	0,351467	0,277056
3	0,328161	0,312803	0,287723	0,253661	0,211592
4	0,24662	0,236548	0,219981	0,197241	0,168761
5	0,197523	0,190127	0,177915	0,161058	0,139787
6	0,164724	0,158916	0,149306	0,135992	0,119114
7	0,141264	0,1365	0,128602	0,117636	0,10369
8	0,123653	0,119621	0,112931	0,103626	0,091766
9	0,109946	0,106456	0,100659	0,092587	0,082282
10	0,098974	0,095899	0,09079	0,083668	0,074564
11	0,089993	0,087247	0,082682	0,076313	0,068163
12	0,082506	0,080026	0,075902	0,070144	0,06277
13	0,076169	0,073909	0,070149	0,064897	0,058165
14	0,070736	0,068661	0,065206	0,060379	0,054188
15	0,066027	0,064108	0,060914	0,056448	0,050719

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Sin t**

k	<b>Error Relativ</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
16	0,061905	0,060121	0,057151	0,052998	0,047666
17	0,058268	0,056602	0,053826	0,049944	0,044959
18	0,055034	0,053471	0,050867	0,047223	0,042543
19	0,052141	0,050669	0,048216	0,044783	0,040373
20	0,049536	0,048145	0,045827	0,042583	0,038413
21	0,04718	0,045861	0,043664	0,040588	0,036634
22	0,045037	0,043784	0,041696	0,038772	0,035013
23	0,04308	0,041887	0,039898	0,037112	0,033529
24	0,041287	0,040147	0,038248	0,035588	0,032165
25	0,039637	0,038547	0,036729	0,034184	0,030908
26	0,038113	0,037068	0,035326	0,032886	0,029746
27	0,036703	0,0357	0,034027	0,031683	0,028667
28	0,035393	0,034428	0,032819	0,030566	0,027664
29	0,034173	0,033244	0,031695	0,029524	0,02673
30	0,033035	0,032139	0,030645	0,028551	0,025856

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Sin t**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
1	0,1490	0,0211	0,1707=	0,2985=	0,4058	0.4441
2	0,1938	0,1053	0,0145	0,0757	0,1633	0.2545
3	0,1626	0,1081	0,0493	0,0124	0,0759	0.1802
4	0,1350	0,0967	0,0544	0,0089	0,0392	0.1403
5	0,1143	0,0851	0,0525	0,0168	0,0214	0.1156
6	0,0988	0,0753	0,0489	0,0197	0,0118	0.0982
7	0,0868	0,0673	0,0451	0,0206	0,0062	0.0853
8	0,0774	0,0606	0,0416	0,0204	0,0028	0.0754
9	0,0697	0,0551	0,0385	0,0199	0,0006	0.0675
10	0,0635	0,0505	0,0357	0,0191	0,0008	0.0613
11	0,0582	0,0466	0,0333	0,0183	0,0018	0.05625
12	0,0537	0,0432	0,0311	0,0175	0,0024	0.0519
13	0,0499	0,0403	0,0292	0,0167	0,0029	0.0482
14	0,0466	0,0377	0,0275	0,0160	0,0032	0.0450
15	0,0437	0,0355	0,0260	0,0153	0,0034	0.0422

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Sin t**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
16	0,0411	0,0334	0,0246	0,0146	0,0035	0.0397
17	0,0388	0,0316	0,0234	0,0140	0,0036	0.0375
18	0,0368	0,0300	0,0223	0,0134	0,0036	0.0355
19	0,0349	0,0286	0,0212	0,0129	0,0036	0.0337
20	0,0333	0,0272	0,0203	0,0124	0,0036	0.0321
21	0,0318	0,0260	0,0194	0,0120	0,0036	0.0306
22	0,0304	0,0249	0,0187	0,0115	0,0036	0.0293
23	0,0291	0,0239	0,0179	0,0118	0,0035	0.0281
24	0,0279	0,0230	0,0173	0,0108	0,0035	0.0270
25	0,0269	0,0221	0,0166	0,0104	0,0034	0.0259
26	0,0259	0,0213	0,0160	0,0101	0,0034	0.0250
27	0,0249	0,0206	0,0155	0,0098	0,0033	0.0241
28	0,0241	0,0199	0,0150	0,0095	0,0033	0.0232
29	0,0233	0,0192	0,0145	0,0092	0,0032	0.0224
30	0,0225	0,0186	0,0141	0,0089	0,0031	0.0217

**LAMPIRAN B**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Cos t**

k	Error Relatif				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
1	0,0246	0,0943	0,1982	0,3222	0,4530
2	0,0099	0,0393	0,0869	0,1506	0,2281
3	0,0061	0,0243	0,0543	0,0957	0,1482
4	0,0043	0,0174	0,0392	0,0697	0,1089
5	0,0034	0,0136	0,0306	0,0547	0,0859
6	0,0027	0,0111	0,0251	0,0449	0,0708
7	0,0023	0,0094	0,0213	0,0381	0,0602
8	0,0020	0,0081	0,0184	0,0331	0,0524
9	0,0017	0,0071	0,0163	0,0292	0,0463
10	0,0016	0,0064	0,0145	0,0261	0,0415
11	0,0014	0,0058	0,0131	0,0237	0,0376
12	0,0013	0,0053	0,0120	0,0216	0,0343
13	0,0012	0,0048	0,0110	0,0199	0,0316
14	0,0011	0,0045	0,0102	0,0184	0,0293
15	0,0010	0,0042	0,0095	0,0171	0,0273

**LAMPIRAN B (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Cos t**

k	Error Relatif				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
16	0,0009	0,0039	0,0089	0,0160	0,0255
17	0,0009	0,0036	0,0083	0,0151	0,0240
18	0,0008	0,0034	0,0079	0,0142	0,0226
19	0,0008	0,0034	0,0079	0,0142	0,0226
20	0,0007	0,0031	0,0070	0,0127	0,0203
21	0,0007	0,0029	0,0067	0,0121	0,0193
22	0,0007	0,0028	0,0064	0,0115	0,0184
23	0,0006	0,0027	0,0061	0,0110	0,0176
24	0,0006	0,0025	0,0058	0,0106	0,0169
25	0,0006	0,0024	0,0056	0,0101	0,0162
26	0,0005	0,0023	0,0054	0,0097	0,0155
27	0,0005	0,0022	0,0052	0,0094	0,0149
28	0,0005	0,0022	0,0050	0,0090	0,0144
29	0,0005	0,0021	0,0048	0,0087	0,0139
30	0,0004	0,0020	0,0046	0,0084	0,0134

**LAMPIRAN B (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Cos t**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
1	0,5807	0,6996	0,8078	0,9067	1	0.5087
2	0,3170	0,4153	0,5218	0,6368	0,7630	0.3169
3	0,2112	0,2847	0,3692	0,4665	0,5802	0.2240
4	0,1571	0,2146	0,2827	0,3633	0,4607	0.1718
5	0,1247	0,1717	0,2281	0,2962	0,3798	0.1389
6	0,1032	0,1428	0,1909	0,2495	0,3223	0.1163
7	0,0880	0,1222	0,1639	0,2153	0,2796	0.1001
8	0,0767	0,1067	0,1436	0,1892	0,2467	0.0877
9	0,0679	0,0947	0,1277	0,1687	0,2206	0.0780
10	0,0609	0,0851	0,1150	0,1522	0,1995	0.0703
11	0,0552	0,0773	0,1045	0,1386	0,1820	0.0639
12	0,0505	0,0707	0,0958	0,1272	0,1673	0.0586
13	0,0466	0,0652	0,0884	0,1175	0,1548	0.0541
14	0,0432	0,0605	0,0821	0,1092	0,1440	0.0502
15	0,0402	0,0564	0,0766	0,1020	0,1346	0.0469

**LAMPIRAN B (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi Cos t**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
16	0,0377	0,0529	0,0718	0,0957	0,1264	0.0440
17	0,0354	0,0497	0,0676	0,0901	0,1191	0.0414
18	0,0334	0,0469	0,0638	0,0851	0,1126	0.0391
19	0,0334	0,0469	0,0638	0,0851	0,1126	0.0370
20	0,0300	0,0422	0,0574	0,0766	0,1015	0.0352
21	0,0285	0,0401	0,0547	0,0730	0,0967	0.0335
22	0,0272	0,0383	0,0522	0,0697	0,0924	0.0320
23	0,0260	0,0366	0,0499	0,0667	0,0884	0.0306
24	0,0249	0,0351	0,0478	0,0639	0,0848	0.0293
25	0,0239	0,0337	0,0459	0,0614	0,0814	0.0281
26	0,0230	0,0324	0,0441	0,0590	0,0783	0.0270
27	0,0221	0,0311	0,0425	0,0568	0,0755	0.0260
28	0,0213	0,0300	0,0409	0,0548	0,0728	0.0251
29	0,0205	0,0290	0,0395	0,0529	0,0703	0.0242
30	0,0198	0,0280	0,0382	0,0511	0,0680	0.0234



**LAMPIRAN C**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi  $e^t$**

k	<b>Error Relativ</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
1	0,1170	0,2792	0,5118	0,862	1,4261
2	0,0553	0,1230	0,2062	0,3092	0,4377
3	0,0362	0,0789	0,1291	0,1881	0,2577
4	0,0269	0,0580	0,0939	0,1351	0,1825
5	0,0214	0,0459	0,0738	0,1054	0,1412
6	0,0178	0,0380	0,0608]	0,0864	0,1152
7	0,0152	0,0324	0,0517	0,0732	0,0973
8	0,0132	0,0282	0,0449	0,0635	0,0842
9	0,0118	0,0250	0,0397	0,0561	0,0742
10	0,0106	0,0224	0,0356	0,0502	0,0663
11	0,009636	0,0203	0,0323	0,0455	0,0599
12	0,0088	0,0186	0,0295	0,0415	0,0547
13	0,0081	0,0172	0,0272	0,0382	0,0503
14	0,0075	0,0159	0,0252	0,0354	0,0465
15	0,0070	0,0148	0,0235	0,0329	0,0433

**LAMPIRAN C (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi  $e^t$**

k	Error Relativ				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
16	0,0066	0,0139	0,0220	0,0308	0,0405
17	0,0062	0,0131	0,0206	0,0290	0,0380
18	0,0058	0,0123	0,0195	0,0273	0,0358
19	0,0055	0,0117	0,0184	0,0258	0,0339
20	0,0052	0,0111	0,0175	0,0245	0,0321
21	0,0050	0,0105	0,016	0,0233	0,0306
22	0,0047	0,0100	0,0159	0,0222	0,0291
23	0,0045	0,0096	0,0152	0,0212	0,0278
24	0,0043	0,0092	0,0145	0,0203	0,0266
25	0,0042	0,0088	0,0139	0,0195	0,0255
26	0,0040	0,0085	0,0134	0,0187	0,0245
27	0,0039	0,0082	0,0129	0,0180	0,0236
28	0,0037	0,0079	0,0124	0,0174	0,0227
29	0,0036	0,0076	0,0120	0,0168	0,0219
30	0,0035	0,0073	0,0116	0,0162	0,0212

**LAMPIRAN C (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi  $e^t$**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
1	2,4300	4,517614	10,23322	39,65697	Inf	Inf
2	0,6000	0,8082	1,0802	1,4436	1,9430	0.7006
3	0,3398	0,4373	0,5536	0,6933	0,8623	0.3576
4	0,2368	0,2993	0,3712	0,4542	0,5502	0.2408
5	0,1817	0,2274	0,2790	0,3373	0,4033	0.1817
6	0,1474	0,1833	0,2234	0,2682	0,3181	0.1459
7	0,1240	0,1535	0,1863	0,2225	0,2626	0.1219
8	0,107	0,1321	0,1597	0,1901	0,2235	0.1047
9	0,0940	0,1159	0,1398	0,1660	0,1946	0.0917
10	0,0839	0,1032	0,1243	0,1473	0,1722	0.0816
11	0,0758	0,0930	0,1119	0,1323	0,1545	0.0735
12	0,0690	0,0847	0,1017	0,1201	0,1401	0.0669
13	0,0634	0,0777	0,0932	0,1100	0,1281	0.0613
14	0,0586	0,0718	0,0861	0,1015	0,1180	0.0567
15	0,0545	0,0667	0,0799	0,0941	0,1094	0.0526

**LAMPIRAN C (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi  $e^t$**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
16	0,0510	0,0623	0,0746	0,0878	0,1020	0.0491
17	0,0478	0,0585	0,0699	0,0823	0,0955	0.0461
18	0,0451	0,0551	0,0658	0,0774	0,0898	0.0434
19	0,0426	0,0520	0,0622	0,0730	0,0847	0.0410
20	0,0404	0,0493	0,0589	0,0692	0,0802	0.0388
21	0,0384	0,0469	0,0559	0,0657	0,0761	0.0369
22	0,0366	0,0446	0,0533	0,0625	0,0724	0.0351
23	0,0349	0,0426	0,0508	0,0597	0,0691	0.0336
24	0,0334	0,0408	0,0486	0,0571	0,0660	0.0321
25	0,0321	0,0391	0,0466	0,0547	0,0632	0.0308
26	0,0308	0,0375	0,0447	0,0525	0,0607	0.0295
27	0,0296	0,0361	0,0430	0,0504	0,0583	0.0284
28	0,0285	0,0348	0,0414	0,0485	0,0561	0.0274
29	0,0275	0,0335	0,0399	0,0468	0,0541	0.0264
30	0,0266	0,0324	0,0386	0,0452	0,0522	0.0255

**LAMPIRAN D**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi t**

k	<b>Error Relatif</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
1	1	1	1	1	1
2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
3	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
4	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
6	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166
7	0,142	0,142	0,142	0,142	0,142
8	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
9	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111
10	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
11	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
12	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
13	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076
14	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071
15	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066

**LAMPIRAN D (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi t**

k	<b>Error Relatif</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
16	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062
17	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058
18	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055
19	0,052	0,052	0,052	0,052	0,052
20	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
21	0,047	0,047	0,047	0,047	0,047
22	0,045	0,045	0,045	0,045	0,045
23	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043
24	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041
25	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
26	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038
27	0,037	0,037	0,037	0,037	0,037
28	0,035	0,035	0,035	0,035	0,035
29	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034
30	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033

**LAMPIRAN D (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi t**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
1	1	1	1	1	1	1
2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0.5
3	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0.333
4	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0.25
5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0.2
6	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166	0.166
7	0,142	0,142	0,142	0,142	0,142	0.142
8	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0.125
9	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111	0.111
10	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0.1
11	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0.090
12	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0.083
13	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0.076
14	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0.071
15	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0.066

**LAMPIRAN D (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi t**

k	Error Relatif					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
16	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062	0.062
17	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0.058
18	0,055	0,055	0,055]	0,055	0,055=	0.055
19	0,052	0,052	0,052	0,052	0,052	0.052
20	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0.05
21	0,047	0,047	0,047	0,047	0,047	0.047
22	0,045	0,045	0,045	0,045	0,045	0.045
23	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0.045
24	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0.041
25	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0.04
26	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0.038
27	0,037	0,037	0,037	0,037	0,037	0.037
28	0,035	0,035	0,035	0,035	0,035	0.035
29	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0.034
30	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0.033



**LAMPIRAN E**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi 1**

k	Error Relatif				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1,11E-16	0	0
5	0	0	0	0	0
6	1,11E-16	1,11E-16	0	1,11E-16	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	2,22E-16	0	0
10	0	0	1,11E-16	0	2,22E-16
11	0	0	1,11E-16	0	0
12	0	0	0	0	2,22E-16
13	2,22E-16	2,22E-16	2,22E-16	2,22E-16	0
14	1,11E-16	1,11E-16	0	1,11E-16	0
15	1,11E-16	1,11E-16	1,11E-16	1,11E-16	0

**LAMPIRAN E (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi 1**

k	<b>Error Relatif</b>				
	t = 0,1	t = 0,2	t = 0,3	t = 0,4	t = 0,5
16	0	0	0	0	0
17	1,11E-16	1,11E-16	1,11E-16	1,11E-16	0
18	0	0	0	0	0
19	1,11E-16	1,11E-16	0	1,11E-16	1,11E-16
20	1,11E-16	1,11E-16	0	1,11E-16	1,11E-16
21	0	0	2,22E-16	0	0
22	4,44E-16	4,44E-16	2,22E-16	4,44E-16	4,44E-16
23	0	0	0	0	1,11E-16
24	0	0	0	0	1,11E-16
25	4,44E-16	4,44E-16	4,44E-16	4,44E-16	2,22E-16
26	2,22E-16	2,22E-16	0	2,22E-16	2,22E-16
27	3,33E-16	3,33E-16	3,33E-16	3,33E-16	2,22E-16
28	0	0	1,11E-16	0	0
29	1,11E-16	1,11E-16	0	1,11E-16	2,22E-16
30	1,11E-16	1,11E-16	2,22E-16	1,11E-16	2,22E-16

**LAMPIRAN E (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi 1**

k	Error Relativ					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
1	1,1E-16	0	0	0	0	1,1E-02
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1,1E-16	0	1,1E-02
4	0	2,2E-16	0	0	0	3,3E-02
5	0	1,1E-16	0	0	0	1,1E-02
6	0	1,1E-16	1,1E-16	1,1E-16	0	6,6E-02
7	0	0	0	1,1E-16	0	1,1E-02
8	0	1,1E-16	0	0	0	1,1E-02
9	0	0	0	0	0	2,2E-02
10	0	2,2E-16	0	1,1E-16	2,2E-16	8,8E-02
11	0	0	0	0	0	1,1E-02
12	0	1,1E-16	0	2,2E-16	2,2E-16	7,7E-02
13	0	0	2,2E-16	1,1E-16	0	1,2E-01
14	0	1,1E-16	1,1E-16	0	0	5,5E-02
15	1,1E-16	0	1,1E-16	1,1E-16	0	7,7E-02

**LAMPIRAN E (LANJUTAN)**  
**Tabel Average Error Relatif Fungsi 1**

k	<b>Error Relativ</b>					AER
	t = 0,6	t = 0,7	t = 0,8	t = 0,9	t = 1	
16	1,1E-16	0	0	1,1E-16	0	2,2E-02
17	0	0	1,1E-16	2,2E-16	0	7,7E-02
18	2,2E-16	2,2E-16	0	1,1E-16	0	5,5E-02
19	0	0	1,1E-16	0	1,1E-16	6,6E-02
20	0	0	1,1E-16	0	1,1E-16	6,6E-02
21	2,2E-16	0	0	1,1E-16	0	5,5E-02
22	2,2E-16	2,2E-16	4,4E-16	2,2E-16	4,4E-16	3,5E-01
23	0	1,1E-16	0	1,1E-16	1,1E-16	4,4E-02
24	1,1E-16	0	0	0	1,1E-16	3,3E-02
25	4,4E-16	4,4E-16	4,4E-16	2,2E-16	2,2E-16	3,7E-01
26	1,1E-16	0	2,2E-16	0	2,2E-16	1,4E-01
27	2,2E-16	2,2E-16	3,3E-16	3,3E-16	2,2E-16	2,8E-01
28	0	2,2E-16	0	0	0	3,3E-02
29	0	0	1,1E-16	0	2,2E-16	8,8E-02
30	1,1E-16	2,2E-16	1,1E-16	1,1E-16	2,2E-16	1,5E-01

**LAMPIRAN F**  
**Pehitungan Turunan Pertama dari  $S_f$**

$$S_f(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right] q_1$$

$$\ln S_f(p) = \frac{1}{q_1} \left[ \ln \frac{1}{p} + \ln \left( \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right) \right]$$

$$q_1 \ln S_f(p) = \left[ \ln \frac{1}{p} + \ln \left( \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right) \right]$$

Selanjutnya dilakukan turunan parsial diruas kanan dan kiri menjadi

$$q_1' \ln S_f(p) + q_1 (\ln S_f(p))' = \left[ \ln \frac{1}{p} + \ln \left( \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right) \right]$$

$$q_1' \ln S_f'(p) + q_1 \frac{1}{S_f(p)} S_f(p) = \left[ \ln \frac{1}{p} + \ln \left( \frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p + \gamma)} \right) \right]$$

dengan  $q_1$  dan  $q_2$  merupakan persamaan akar karakteristik homogen sebagai

$$q_1 = b + \sqrt{b^2 + (p + \gamma)} \quad q_2 = b + \sqrt{b^2 + (p + \gamma)}$$

kemudian dilakukan substitusi  $q_1$  dan  $q_2$  kedalam persamaan dengan memisalkan  $p + a^2 = x$  menjadi:

$$\left( \frac{1}{2} (x^2)^{-(1/2)} \right) \ln S_f + \left( b + x \right)^{-(1/2)}$$

$$\left( \frac{\gamma q_2 - (p + \gamma)}{\gamma q_2} \right) p^{-1} \left( -\frac{1}{1} \gamma (x^2)^{-(1/2)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \gamma(b - (x)^{1/2}) - (p + \gamma) - \left( \gamma(b - (x)^{1/2}) \right) \right. \\
& \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{-(1/2)} - 1 \right) = p + \left( \frac{\gamma q_2 - (p + \gamma)}{\gamma q_2} \right) \\
& \left( -\frac{1}{2}\gamma(x^2)^{-(1/2)} \right) \left( \gamma(b - x^{1/2} - (p + \gamma)) \right) \\
& - \left( \gamma(b - x^2)^{1/2} \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{-(1/2)} - 1 \right) \\
& \left( \frac{1}{2}(x^2)^{-(1/2)} \right) \ln S_f + b + (x^2)^{1/2} \\
& - \left( \frac{p}{\gamma} + 1 \right) p^{-1} \left[ -\frac{1}{2}\gamma^2(b + (x^2)^{1/2} + 1) - \gamma - p \right] \\
& - \left[ \left( \gamma(b - (x^2)^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{-(1/2)} - 1 \right) \right] = p \\
& + \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{-(1/2)} \right) \left( \gamma(b - (x)^{1/2} - (p + \gamma)) \right) \\
& \left( \frac{\gamma q_2 - (p + \gamma)}{\gamma q_2} \right) - \left( \gamma(b - (x)^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{-1/2} - 1 \right) \\
\\
& \left( \frac{1}{2}x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + bp^{-1} \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 bx^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2}p^{-1} \\
& - p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& + \gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& - \left( \gamma(b - (x)^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma(x)^{1/2} - 1 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p + \left( \frac{\gamma q_2 - (p + \gamma)}{\gamma q_2} \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma (x)^{-(1/2)} \right) \\
& \left( \gamma (b - (x)^{1/2} - (p + \gamma)) - \left( -\frac{1}{2} \gamma (x)^{-(1/2)} - 1 \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{2} x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + b p^{-1} \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2} p^{-1} \right. \\
& \left. \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) - \gamma b - \gamma x^{1/2} - p b - p x^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x^{1/2}} \right) \right. \\
& \left. - p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \right. \\
& \left. + \gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \gamma^2 b x^{-(1/2)} + \frac{1}{2} \gamma^b + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} = p + \left( \frac{\gamma q_2 - (p + \gamma)}{\gamma q_2} \right) \right. \\
& \left. \left( -\frac{1}{2} \gamma (p + a^2)^{-(1/2)} \right) \left( \gamma (b - (p + a^2)^{1/2}) - (p + \gamma) \right) \right. \\
& \left. - \left( \gamma (b - (p + a^2)^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma (p + a^2)^{-(1/2)} - 1 \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{2} x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + b p^{-1} \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2} p^{-1} \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{2} x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + b p^{-1} \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2} p^{-1} \right. \\
& \left. \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) - \gamma b - \gamma x^{1/2} - p b - p x^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x^{1/2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& + \gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& - \frac{1}{2} \gamma^2 b x^{-(1/2)} + \frac{1}{2} \gamma^b + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} = p + \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \\
& \left( -\gamma b x^{-(1/2)} + \gamma + p x^{-(1/2)} + \frac{1}{2} \gamma x^{-(1/2)} \right) \\
& \left( \gamma(b - x)^{1/2} - (p + \gamma) \right) - \left( \gamma(b - x^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma x^{-(1/2)} - 1 \right) \\
& \left( \frac{1}{2} x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + b p^{-1} \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2} p^{-1} \\
& \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 b x^{1/2} + 1 \right) - \gamma b - \gamma x^{1/2} - p b - p x^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x^{1/2}} \right) \\
& - p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& + \gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& - \frac{1}{2} \gamma^2 b x^{-(1/2)} + \frac{1}{2} \gamma^b + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 x^{1/2} = p + \\
& \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \left( -\gamma^2 b^2 x^{-(1/2)} + \gamma^2 b + \gamma p b x^{-(1/2)} \right) \\
& + \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \left( -\gamma^2 b x^{-(1/2)} + \gamma^2 \right) b - \gamma^2 x^{1/2} - p \gamma + \gamma^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(b-x^{1/2})} \left( \frac{1}{2}\gamma^2 bx^{-(1/2)} - \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma px^{-(1/2)} + \frac{1}{2}\gamma^2 x^{-(1/2)} \right) \\
& \quad - \left( \gamma(b-(p+a^2)^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma(p+a^2)^{-(1/2)} - 1 \right) \\
& \quad \left( \frac{1}{2}x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + bp^{-1} \quad \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 bx^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2}p^{-1} \\
& \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 bx^{1/2} + 1 \right) - \gamma b - \gamma x^{1/2} - pb - px^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x^{1/2}} \right) \\
& \quad - p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& \quad + \gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2}\gamma^2 bx^{-(1/2)} + \frac{1}{2}\gamma^b + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 x^{1/2} = p + \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \\
& \quad \left( -\gamma bx^{-(1/2)} + \gamma + px^{-(1/2)} + \frac{1}{2}\gamma x^{-(1/2)} \right) \\
& \left( \gamma(b-x)^{1/2} - (p+\gamma) \right) - \left( \gamma(b-x^{1/2}) \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma x^{-(1/2)} - 1 \right) \\
& \quad \left( \frac{1}{2}x^{-(1/2)} \right) \ln S_f + bp^{-1} \quad \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 bx^{1/2} + 1 \right) + x^{1/2}p^{-1} \\
& \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 bx^{1/2} + 1 \right) - \gamma b - \gamma x^{1/2} - pb - px^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x^{1/2}} \right) \\
& \quad - p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{b + x} \right) \left( -\frac{1}{2}\gamma^2 x^{1/2} + 1 \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + \frac{p^2}{\gamma} \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) + p \left( \frac{b^2 - x^{1/2}}{(b - x^{1/2})^2} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2}\gamma^2 b x^{-(1/2)} + \frac{1}{2}\gamma^b + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 x^{1/2} = p + \\
& \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \left( -\gamma^2 b^2 x^{-(1/2)} + \gamma^2 b + \gamma p b x^{-(1/2)} \right) + \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \\
& \quad \left( -\gamma^2 b x^{-(1/2)} + \gamma^2 \right) b - \gamma^2 x^{1/2} - p\gamma + \gamma^2 \quad \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \\
& \quad \left( p\gamma b x^{-(1/2)} - p\gamma - p^2 x^{-(1/2)} + p\gamma x^{-(1/2)} \right) \frac{1}{2(b - x^{1/2})} \\
& \quad \left( \frac{1}{2}\gamma^2 b x^{-(1/2)} - \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma p x^{-(1/2)} + \frac{1}{2}\gamma^2 x^{-(1/2)} \right) \\
& \quad - \frac{1}{2}\gamma^2 b x^{-(1/2)} - \gamma b + \frac{1}{2}\gamma^2 + \gamma x^{1/2}
\end{aligned}$$

## LAMPIRAN G

### *Listing* Program pada Fungsi Sederhana $\sin t$

```

clear all;
t=input('Masukkan waktu : ');
v=input('Masukkan v : ');
indl=0;
for k= 1:30
    indl=indl+1;
    indeks=0;
    for t=0.1:0.1:1
        indeks=indeks+1;
        ft=sin(v*t)
        syms s;
        fs=v/(s^2+v^2);
        for i=1:k
            fs=diff(fs);
        end
        fs=inline(fs,'s');
        f=(-1)^k*(1/factorial(k))*(k/t)^(k+1)*fs(k/t);

        EA(indeks)=abs(f-ft);
        ER(indeks)=abs((f-ft)/ft);
    end
    EAtot=0;
    ERtot=0;
    for i=1:indeks
        EAtot=EAtot+EA(i);
        ERtot=ERtot+ER(i);
    end

    AvgEA(indl)=EAtot/indeks;

```



## LAMPIRAN H

### *Listing* Program pada Fungsi Sederhana Cos t

```
clear all;
t=input('Masukkan waktu : ');
v=input('Masukkan v : ');
indl=0;
for k= 1:30
    indl=indl+1;
    indeks=0;
    for t=0.1:0.1:1
        indeks=indeks+1;
        ft=t^v
        syms s;
        a=1;
        for i = 1:k
            a=a*(v+i);
        end
        fs=(-1)^k*factorial(v)*a*s^(-v-k-1)
        fs=inline(fs,'s');
        f=(-1)^k*(1/factorial(k))*(k/t)^(k+1)*fs(k/t);

        EA(indeks)=abs(f-ft);
        ER(indeks)=abs((f-ft)/ft);
    end
    EAtot=0;
    ERtot=0;
    for i=1:indeks
        EAtot=EAtot+EA(i);
```



## LAMPIRAN I

### *Listing Program pada Fungsi Sederhana $t^n$*

```

clear all;
t=input('Masukkan waktu : ');
v=input('Masukkan v : ');
indl=0;
for k= 1:30
    indl=indl+1;
    indeks=0;
    for t=0.1:0.1:1
        indeks=indeks+1;
        ft=t^v
        syms s;
        a=1;
        for i = 1:k
            a=a*(v+i);
        end
        fs=(-1)^k*factorial(v)*a*s^(-v-k-1)
        fs=inline(fs,'s');
        f=(-1)^k*(1/factorial(k))*(k/t)^(k+1)*fs(k/t);

        EA(indeks)=abs(f-ft);
        ER(indeks)=abs((f-ft)/ft);
    end
    EAtot=0;
    ERtot=0;
    for i=1:indeks
        EAtot=EAtot+EA(i);
    end
end

```





## LAMPIRAN J

### *Listing* Program pada Fungsi Sederhana $e^{at}$

```

clc;
clear all;
t=input('Masukkan waktu : ');
v=input('Masukkan v : ');
ind1=0;
for k= 1:30
    ind1=ind1+1;
    indeks=0;
    for t=0.1:0.1:1
        indeks=indeks+1;
        ft=t^v
        syms s;
        a=1;
        for i = 1:k
            a=a*(v+i);
        end
        fs=(-1)^k*factorial(v)*a*s^(-v-k-1)
        fs=inline(fs,'s');
        f=(-1)^k*(1/factorial(k))*(k/t)^(k+1)*fs(k/t);
        EA(indeks)=abs(f-ft);
        ER(indeks)=abs((f-ft)/ft);
    end
    EAtot=0;
    ERtot=0;
    for i=1:indeks
        EAtot=EAtot+EA(i);
        ERtot=ERtot+ER(i);
    end
end

```



## LAMPIRAN K

### *Listing* Program pada Fungsi Sederhana 1

```

for t=0.1:0.1:1
    indeks=indeks+1;
    ft=1
    syms s;
    fs=(-1)^k*factorial(k)*s^(-k-1);

    fs=inline(fs,'s');
    f=(-1)^k/factorial(k)*(k/t)^(k+1)*fs(k/t);

    EA(indeks)=abs(f-ft);
    ER(indeks)=abs((f-ft)/ft);
end
EAtot=0;
ERTot=0;
for i=1:indeks
    EAtot=EAtot+EA(i);
    ERTot=ERTot+ER(i);
end

AvgEA(ind1)=EAtot/indeks;
AvgER(ind1)=ERTot/indeks;
end

```



## LAMPIRAN L

### *Listing Program Exersice Optimal American Put Option tanpa Dividen pada Metode Widder*

```
clc;
clear all;
t=input('Masukkan waktu : ');
r=input('Masukkan suku bunga : ');
v=input('Masukkan volatilitas : ');
gamma=2*r/v^2;
b=(1-gamma)/2;
tic
ind=0;
syms s;

q1=b+sqrt(b^2+(s+gamma));
q2=b-sqrt(b^2+(s+gamma));
fs=(1/s*((gamma*q2)/((gamma*q2)-(s+gamma))))^(1/q1)
for k=1:4
ind=ind+1
p=k/t;
q1=b+sqrt(b^2+(p+gamma));
q2=b-sqrt(b^2+(p+gamma));
sf=1/p*((gamma*q2)/((gamma*q2)-(p+gamma))))^(1/q1)

fs=diff(fs)

fk=inline(fs,'s');
f(ind)=(-1)^k*(1/factorial(k))*(k/t)^(k+1)*fk(k/t)
end

toc
```



# LAMPIRAN M

## *Listing Program Exersice Optimal American Put Option tanpa Dividen pada Metode Gaver-Stahfest*

```

clc;
L = 8;
t = 0.00001;
nn2 = L/2;
nn21= nn2+1;
for n = 1:L
    z = 0.0;
    for k = floor( ( n + 1 ) / 2 ):min(n,nn2)
        z = z + ((k*nn2)*factorial(2*k))/ ...
            (factorial(nn2-k)*factorial(k)*factorial(k-1)* ...
            factorial(n-k)*factorial(2*k - n));
    end
    v(n)=(-1)^(n+nn2)*z;
end
tic
sum = 0.0;
ln2_on_t = log(2.0) / t;

for n = 1:L
    r = 0.1;
    vol =0.3;
    g = 2*r/(vol^2);
    b = (1-g)/2;
    p = n * ln2_on_t;
    q1 = b + sqrt((b^2)+(p+g));
    q2 = b - sqrt((b^2)+(p+g));
    f = 1/p*(((g*q2)/((g*q2)-(p+g))))^(1/q1));
    sum = sum + v(n) * f;
end
ilt = sum * ln2_on_t;
disp(ilt)
toc

```





## LAMPIRAN N BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Lisa Anisa, lahir di Mojokerto, pada 5 April 1995. Terlahir sebagai anak pertama dari 2 bersaudara dari pasangan BambangWidonarko,S.Pd dan Romlatun. Sejak usia 4.5 tahun, penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Cut Nyak Dien Kota Mojokerto (1999-2001), SD Negeri Miji 2 Kota Mojokerto (2001-2007), SMP Negeri 2 Kota Mojokerto (2007-2010), dan SMA Negeri 1 Puri Kab. Mojokerto (2010-2013). Kemudian pada tahun 2013, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya melalui jalur SNMPTN dengan NRP 1213 100 027. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan yang terdiri dari bidang minat Pemodelan dan Riset Operasi dan Pengolahan Data. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis aktif berorganisasi di Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai staf Kesejahteraan Mahasiswa (KESMA) (2016-2017), Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah Matematika sebagai sekretaris Departemen Dana Usaha (2016-2017) dan sebagai staff departemen Syiar (2015-2016). Penulis juga aktif diberbagai kepanitiaan seperti

Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 2015 dan OMITS 2016, Semarak Ibnu Muqlah ITS, LKMM Pra TD dan lain sebagainya.

Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditunjukan ke penulis melalui email [lisaanisa0@gmail.com](mailto:lisaanisa0@gmail.com)